ZGŁOSZENIE ODSTĘPSTWA NR 5

Podstawowe informacje			
Zgłaszający	Tomasz Walczykiewicz	**Data zgłoszenia:**	2018-01-03
Osoba odpowiedzialna merytorycznie za realizację zadania	Tamara Tokarczyk	**Wymagana data decyzji:**	2018-01-09
Tytuł zgłoszenia	Odstępstwo od metodyki opracowania danych hydrologicznych i meteorologicznych dotyczące obliczania maksymalnych rocznych dobowych opadów średnich w zlewni o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia oraz przepływów maksymalnych o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia.		
Nr i nazwa zadania	Zadanie 1.3.2.1 Opracowanie danych hydrologicznych i meteorologicznych		
Nr i nazwa produktów	[1.3.14.4 - Wyniki weryfikacji danych hydrologicznych] [1.3.14.23 - Raporty z opracowania danych hydrologicznych]		
Podstawa zgłoszenia	Załącznik nr 1 do SIWZ (SOPZ) – Zadanie 1.3.2.1. Opracowanie danych hydrologicznych i meteorologicznych: „W szczególnych przypadkach Zamawiający dopuszcza odstępstwa od powyższej metodyki i przyjęcie innych metod obliczeń, pod warunkiem uzyskania akceptacji Zamawiającego. Jednakże takie przypadki muszą zostać szczegółowo uzasadnione przez Wykonawcę z jednoczesnym wskazaniem metody alternatywnej, wraz z jej opisem."		
Wpływ na harmonogram realizacji zadania	Brak akceptacji wpływa na harmonogram		
Opis odstępstwa			
Typ zlewni	Zlewnie kontrolowane		
Zagadnienie, którego dotyczy odstępstwo	II. Średni w zlewni opad maksymalny roczny o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia. III. Przepływy maksymalne roczne o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia.		
Metoda, której dotyczy odstępstwo	II. 2. Obliczenie maksymalnych rocznych dobowych opadów średnich w zlewni o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia – rozkład logarytmiczno-normalny – badanie zgodności rozkładu teoretycznego z empirycznym. III. 1. Obliczenie przepływów maksymalnych rocznych o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia – badanie zgodności rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym		
Zakres odstępstwa	Rzeki kontrolowane, zlewnie niekontrolowane		

Proponowana metoda alternatywna wraz z jej opisem

Nazwa metody	Obliczenie maksymalnych rocznych dobowych opadów średnich w zlewni o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia oraz przepływów maksymalnych rocznych o określonym prawdopodobieństwie przewyższenia – badanie zgodności rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym za pomocą testu χ^2 Pearsona

Opis

Dana jest prosta próba losowa $\{x_i\}$, i=1,2,..., n.
Stawiamy hipotezę $H_0(F(x) = F_{teor}(x))$.

Sprawdzenie zgodności przyjętego rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym przeprowadza się poprzez zastosowanie testu zgodności χ^2-Pearsona przy przyjętym poziomie istotności α (α=0,05). Podstawą testu χ^2-Pearsona jest statystyka:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i}$$

gdzie:
m_i– liczba elementów próby losowej w i-tym przedziale,
π_i – prawdopodobieństwo zaobserwowania wartości zmiennej losowej w i-tym przedziale.

Statystyka ta przy $n \to \infty$ podlega granicznemu rozkładowi χ^2 o (r-k-1) stopniach swobody, gdzie r jest liczbą przedziałów, na które podzielono zakres wartości zmiennej losowej, k jest liczbą estymowanych parametrów rozkładu funkcji rozkładu prawdopodobieństwa $p(x)$, estymowanych z próby metodą największej wiarygodności.

W celu sprawdzenia założonej hipotezy, cały obszar zmienności zmiennej losowej X dzielony jest na r przedziałów Δx_i, $i = 1,2, \ldots, r$. Każdy przedział zawiera m_i elementów próby losowej.

Następnie należy określić z rozkładu teoretycznego prawdopodobieństwo πi, że zmienna losowa X przyjmie wartości należące do i –tego przedziału (i = 1, 2, ..., r), gdzie $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r = 1$. Prawdopodobieństwo to określa się za pomocą funkcji rozkładu teoretycznego jako różnicę prawdopodobieństw przewyższenia wartości granicznych i-tego przedziału. Każdy przedział zawiera m_i elementów próby losowej. Wyrażenie $m_i - n\pi_i$ oznacza różnicę między liczebnością empiryczną i teoretyczną w i-tym przedziale. Zgodność jest tym większa, im rozbieżność pomiędzy liczebnościami z próby a odpowiednimi liczebnościami oczekiwanymi jest mniejsza (w przypadku idealnej zgodności powinna ona wynosić 0). Wartość krytyczną statystyki $\chi^2_{kr.}$ na podstawie założonego poziomu istotności testu należy odczytać z tablic rozkładu χ^2-Pearsona.

Porównując wartość statystyki obliczonej ze wzoru z wartością krytyczną można uzyskać jeden z następujących wyników testu:
$\chi^2 < \chi^2_{kr.}$ – nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym,
$\chi^2 \geq \chi^2_{kr.}$– rozkład teoretyczny nie jest zgodny z rozkładem empirycznym, hipoteza o zgodności zostaje odrzucona.

Zaleca się, by przedziały Δx_i definiować według identycznych prawdopodobieństw – liczbę przedziałów ustala się na osi prawdopodobieństw, a stad wyznacza dalej przedziały Δx_i.

Szczegółowe uzasadnienie

„Aktualizacja metodyki obliczania przepływów i opadów maksymalnych o określonym prawdopodobieństwie przewyższenia dla zlewni kontrolowanych i niekontrolowanych oraz identyfikacji modeli transformacji opadu w odpływ", zwana dalej w skrócie „Aktualizacją..." do sprawdzenia zgodności rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym wymaga ścisłego stosowania testu λ-Kołmogorowa (opis procedury i przykłady – str. 22, 30, 37, 41, 44, 50, 58). Test λ-Kołmogorowa odnosi się do funkcji rozkładu teoretycznego o znanych parametrach – hipoteza określa całkowicie badany rozkład prawdopodobieństwa. Jeżeli parametry te nie są znane, i szacujemy je na podstawie próby, to w takiej sytuacji wskazania testu Kołmogorowa nie są wiarygodne. Wówczas test λ-Kołmogorowa nie powinien być stosowany.

1. Test zgodności λ-Kołmogorowa: „w praktyce okazuje się testem zbyt łagodnym, rzadko prowadzącym do odrzucenia założonego rozkładu teoretycznego" (Ozga-Zielińska, Brzeziński 1997, s. 198, Ozga-Zielińska i in. 1999, s. III).

2. Ścisłe stosowanie testu λ-Kołmogorowa wymaga aby parametry testowanego rozkładu były znane z góry (Fisz 1969, s. 463), a nie estymowane na podstawie próby, jak to się dzieje w hydrologii (i nie tylko) (Węglarczyk 1998 – s. 116, s. 119, Węglarczyk 1999 – s. 194-195, Węglarczyk 2010 – s. 163). Test oparty jest na założeniu, że hipoteza zerowa określa całkowicie badany rozkład prawdopodobieństwa – znana jest nie tylko funkcja rozkładu teoretycznego, ale także jej parametry. Tymczasem parametry tej funkcji są estymowane z próby, a zatem testowanie nie jest do końca poprawne (Węglarczyk 1999 – s. 194-195, Węglarczyk 2010 – s. 163).

3. Z tego powodu założenia leżące u podstaw testów zgodności nie są na ogół spełnione i testy są w olbrzymiej większości przypadków, po prostu grubymi przybliżeniami (Węglarczyk 1998 – s. 116). Jeśli parametry funkcji rozkładu są szacowane z próby losowej, to twierdzenie Kołmogorowa nie jest spełnione (Domański 1990, Domański, Pruska, 2000 – s. 171, Fisz 1969 – s. 463, Węglarczyk 1993, 1998, 2010). Wówczas wynik uzyskany z testu nie może być podstawą do wnioskowania o odrzuceniu, bądź nieodrzuceniu hipotezy o zgodności rozkładu teoretycznego z danymi obserwacyjnymi. W hydrologii (i nie tylko) estymuje się parametry założonych postaci rozkładów prawdopodobieństwa i w związku z tym test λ-Kołmogorowa nie powinien być stosowany (Ozga-Zielińska, Brzeziński 1997 – s. 198, Węglarczyk 1998 – s. 119).

4. Jeżeli nie znamy parametrów, od których zależy dystrybuanta teoretyczna, i szacujemy je na podstawie próby, to w takiej sytuacji wskazania testu Kołmogorowa należy traktować z rezerwą (Domański, Pruska, 2000, s. 171; Fisz, 1969, s. 463)

5. Wpływ estymacji parametrów rozkładu na wartości krytyczne statystyki testu zgodności λ-Kołmogorowa dla dwuparametrycznych rozkładów – lognormalnego i gamma (Pearsona III typu), zbadany metodą Monte Carlo, wykazał duże różnice między wartościami teoretycznymi w przypadku gdy „parametry rozkładu są znane", a wartościami krytycznymi uzyskanymi, gdy „parametry są estymowane" (Węglarczyk 1993, 1995, 1998, 2010). Oznacza to, że ścisłe stosowanie testu λ-Kołmogorowa w przypadku, gdy parametry rozkładów są estymowane z próby, nie jest poprawne. Należało ten fakt uwzględnić w *„Aktualizacji metodyki..."*, wprowadzając np. odpowiednie korekty

6. Test Kołmogorowa odnosi się do dystrybuanty teoretycznej F(x) o znanych parametrach. Jeżeli nie znamy parametrów, od których zależy dystrybuanta teoretyczna, i szacujemy je na podstawie próby, to w takiej sytuacji wskazania testu Kołmogorowa należy traktować z rezerwą (Domański, Pruska, 2000, s. 171; Fisz, 1969, s. 463)

Powyższych ograniczeń nie posiada test χ^2-Pearsona (Węglarczyk 1999 – s. 194-195, Węglarczyk 2010 – s. 163)

Literatura:

Domański C., 1990, Testy statystyczne, PWE, Warszawa.

Domański C., Pruska K., 2000, Nieklasyczne metody statystyczne, PWE, Warszawa.

Fisz M., 1969, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa.

Ozga-Zielińska, Brzeziński J., 1997: Hydrologia stosowana, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Ozga-Zielińska M., Brzeziński J., Ozga-Zieliński B., 1999: Zasady obliczania największych przepływów rocznych o określonym prawdopodobieństwie przewyższenia przy projektowaniu obiektów budownictwa hydrotechnicznego. Długie ciągi pomiarowe przepływów, Materiały Badawcze nr. 27, Seria: Hydrologia i Oceanologia, Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej, Warszawa.

Węglarczyk S., 1993: Test zgodności Kołmogorowa w przypadku testowania rozkładów z parametrami estymowanymi, Przegląd Geofiz., tom XXXVIII, z. 3-4, Kraków, 2010.

Węglarczyk S., 1998: Wybrane problemy hydrologii stochastycznej, seria: Inżynieria sanitarna i wodna, Politechnika Krakowska im. T. Kościuszki, Kraków.

Węglarczyk S., 1999: Metody statystyczne, Politechnika Krakowska im. T. Kościuszki, Kraków.

Węglarczyk S., 2010: Statystyka w inżynierii środowiska, Politechnika Krakowska im. T. Kościuszki, Kraków.

Uwagi dodatkowe

Uzyskane na podstawie ścisłego stosowania testu λ-Kołmogorowa wyniki testowania zgodności rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym nie są poprawne. Rzutuje to na dobór niesprzecznych rozkładów do obliczania przepływów o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia oraz maksymalnych opadów dobowych o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia. W związku z tym istnieje ryzyko, iż w wielu sytuacjach do opisu własności statystycznych badanych ciągów wskazano rozkłady sprzeczne – które nie powinny być stosowane.

ZAŁĄCZNIK – SKANY FRAGMENTÓW PRAC

SERIA INŻYNIERIA SANITARNA I WODNA

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

STANISŁAW WĘGLARCZYK

WYBRANE PROBLEMY HYDROLOGII STOCHASTYCZNEJ

MONOGRAFIA 235 • KRAKÓW 1998

prezentowanym przez prostą próbę losową) są dwa testy: test λ Kołmogorowa oraz χ^2 Pearsona. Wskutek swojej nadzwyczajnej prostoty obliczeniowej pierwszy test jest popularniejszy; jest on również oficjalnie zalecany do stosowania (Zasady..., 1969). Z drugiej strony krytykuje się go, że jest za mało „ostry" i w większości przypadków nie daje podstaw do odrzucenia badanej hipotezy (Bednarczyk, 1994, Brzeziński, 1995; Ozga-Zielińska i Brzeziński, 1997).

B. Wnikliwa analiza prowadzi do wniosku, że teza taka jest nie do utrzymania — przeciwko niej przemawia kilka argumentów.

Najpoważniejszym z nich jest fakt, stosunkowo rzadko wzmiankowany, a dotyczący nie tylko testu λ Kołmogorowa: problem spełnienia założeń leżących u podstaw stosowanego testu. Ścisłe stosowanie testu λ Kołmogorowa wymaga (Fisz, 1969), aby parametry testowanego rozkładu były znane *a priori*, a nie estymowane na podstawie próby, jak to dzieje się powszechnie w hydrologii (i nie tylko). Z tego ostatniego powodu założenia leżące u podstaw testów zgodności nie są na ogół spełnione i testy te są w olbrzymiej większości przypadków, najczęściej bez świadomości tego faktu, po prostu grubymi przybliżeniami. Teoretyczne konsekwencje niespełnienia założeń nie są znane, jednakże nie ma przeszkód, aby zbadać je eksperymentalnie, np. metodą Monte Carlo. Takie eksperymenty numeryczne były wykonywane (nie tylko dla testu λ Kołmogorowa) (np. Ahmad i in., 1987; Domański, 1990; Węglarczyk, 1993b; Węglarczyk, 1995d). Obejmują one generowanie empirycznej dystrybuanty określonej statystyki testowej (np. statystyki λ Kołmogorowa) (i) dla ustalonego rozkładu (np. rozkładu Pearsona III typu), (ii) dla ustalonej metody estymacji parametrów (np. metody momentów) oraz (iii) dla ustalonej liczebności prostej próby losowej, jak również odczytanie odpowiedniego kwantyla krytycznego (np. $\lambda_{kryt}(\alpha)$) dla ustalonego poziomu istotności α testu, najczęściej α=1% lub α=5%.

Niestety, ceną, jaką się płaci za tego typu podejście, jest brak ogólności: ten sam schemat postępowania trzeba rozpatrywać osobno dla każdego rozkładu, dla każdej metody estymacji parametrów i wszystkich wybranych liczebności próby.

test zgodności Andersona-Darlinga (Ahmad i in., 1988; Węglarczyk, 1993c). STUDIUM SZCZEGÓŁOWE 5B zawiera analizę porównawczą działania testu Kołmogorowa i zmodyfikowanego testu Andersona-Darlinga i pokazane są tam pewne zalety tego ostatniego.

C. Drugi popularny test, test χ^2, jest w pewnej mierze pozbawiony wad testu λ Kołmogorowa. Testowanie hipotezy złożonej, tj. hipotezy o rozkładzie z parametrami estymowanymi z próby, jest uwzględnione przez zmniejszenie liczby stopni swobody ν o liczbę parametrów estymowanych z próby, co powoduje zmniejszenie wartości krytycznej χ^2_{kryt} na danym poziomie istotności α. Należy jednak mieć na uwadze fakt, że wartości te to wartości z rozkładu asymptotycznego. Poza tym test χ^2 opiera się na arbitralnym podziale osi zmienności badanej zmiennej losowej na przedziały, co wprowadza pewną subiektywność, której nie posiada test Kołmogorowa, a która może mieć decydujące znaczenie szczególnie w przypadku niedużej liczebności próby.

5.2. STUDIUM SZCZEGÓŁOWE 5A: Wartości krytyczne statystyki testowej testu zgodności λ Kołmogorowa w przypadku parametrów estymowanych

Poniżej przedstawione są podstawy teoretyczne oraz wyniki zastosowania eksperymentu numerycznego do generowania wartości krytycznych statystyki testowej testu zgodności Kołmogorowa $\lambda_{kryt}(\alpha)$ α=10%, 5% i 1%, dla pięciu dwuparametrowych rozkładów: normalnego, logarytmiczno-normalnego, Pearsona III typu (gamma), Gumbela (Fishera-Tippetta, I typ (max)) oraz rozkładu Weibulla (Fishera-Tippetta, III typ (min)), których oba parametry są estymowane każdą z trzech metod estymacji: momentów, największej wiarygodności i kwantyli.

5.2.1. Ogólny algorytm generowania wartości krytycznych

A. Niech rozkład danej cechy X badanej populacji generalnej będzie rozkładem dwuparametrowym o dystrybuancie $F(x;a,b)$, gdzie funkcja ta oraz jej parametry są znane. Ustalając w sposób dowolny liczebność n próbki możemy wygenerować z tego rozkładu ustaloną z góry liczbę N n-elementowych prostych próbek $\{x_1, x_2,$

$\ldots, x_n\}$ i na tej podstawie obliczyć N wartości statystyki λ Kołmogorowa (Fisz, 1969):

$$\lambda = \sqrt{n}\, D_{max} \tag{5.1}$$

gdzie D_{max} jest wartością bezwględną maksymalnej różnicy pomiędzy dystrybuantą empiryczną a dystrybuantą testowaną (teoretyczną). Jeśli parametry a i b rozkładu $F(x,a,b)$ są znane, to zmienna losowa λ podlega pewnemu dokładnemu rozkładowi, a jeśli n jest duże — bezparametrowemu asymptotycznemu rozkładowi Kołmogorowa (Fisz, 1969). Jeśli parametry a i b rozkładu $F(x;a,b)$ nie są znane, to założenia twierdzenia Kołmogorowa nie są spełnione i test w zasadzie nie powinien być stosowany.

W przeprowadzonym eksperymencie numerycznym funkcja F reprezentowała kolejno rozkład normalny, logarytmiczno-normalny, Pearsona III typu, Gumbela i Weibulla. Założono 9 liczebności próbek: n = 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 70 i 100. Dla każdego n losowano N = 1000 próbek n-elementowych; dla każdej z nich tworzona była dystrybuanta empiryczna i (na ogół) cztery dystrybuanty testowane $F(x; \hat{a}, \hat{b})$:

(A) przypadek „parametry znane": $\hat{a}=a$, $\hat{b}=b$; a i b są wartościami parametrów stosowanych przy generowaniu liczb pseudolosowych;

(B) przypadek „parametry estymowane": $\hat{a}=\hat{a}_{metoda}$, $\hat{b}=\hat{b}_{metoda}$, gdzie $\hat{a}_{metoda}$ i $\hat{b}_{metoda}$ oznaczają parametry danego rozkładu estymowane kolejno: metodą momentów (*MM*, przypadek B1), metodą największej wiarygodności (*MNW*, przypadek B2) oraz metodą kwantyli (*MK*, przypadek B3).

Następnie tworzone były cztery 1000-punktowe empiryczne dystrybuanty statystyki λ Kołmogorowa, z której dla kolejnych czterech przypadków bezpośrednio odczytywane były wartości kwantyli $\lambda_{kryt}(\alpha)$ o prawdopodobieństwie przewyższenia α=10%, 5% i 1%.

W przypadku (A) empiryczna dystrybuanta statystyki λ Kołmogorowa powinna dawać kwantyle $\lambda_{kryt}(\alpha)$ niewiele odbiegające od swoich teoretycznych odpowiedników. Ewentualna zgodność byłaby potwierdzeniem dobrej jakości modelu generacyjnego. Przypadek (B) ilustrować będzie natomiast wpływ metody estymacji, przyjętego rozkładu F oraz liczebności n próby na rozkład statystyki λ.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

Stanisław Węglarczyk

Statystyka w inżynierii środowiska

PODRĘCZNIK DLA STUDENTÓW SZKÓŁ WYŻSZYCH

PK

Kraków 2010

$x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$, zmiana jest większa i wzór na D_{max} przyjmuje następującą postać

$$D_{max} = \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\left|\frac{i}{n+1} - p_{teor}(x_{(i)})\right|, \left|\frac{i+1}{n+1} - p_{teor}(x_{(i)})\right|\right\} \tag{8.31}$$

Rozkład statystyki D_{max}. Znaleziono dokładny rozkład statystyki D_{max} (8.26); tablice z wartościami krytycznymi podane są w niektórych tablicach statystycznych (np. Zieliński i Zieliński 1990).

Często korzysta się z granicznego rozkładu statystyki U zdefiniowanej następującym wzorem

$$\lambda = \sqrt{n} \cdot D_{max} \tag{8.32}$$

Rozkład statystyki λ nazywa się rozkładem Kołmogorowa. Najczęściej stosowane krytyczne (asymptotyczne) wartości $\lambda_{kryt}(\alpha)$ podane są w drugiej kolumnie tabeli 8.3. Liczby te mogą być stosowane dla dużych n; np. Cox i Lewis (1966) podają, że wartości tych można używać dopiero dla $n > 100$. W praktyce asymptotyczny rozkład Kołmogorowa stosuje się dla mniejszych liczebności.

Wpływ estymacji parametrów rozkładu na wartości krytyczne. Test ten, jak też inne testy zgodności, oparty jest na założeniu, że hipoteza zerowa określa całkowicie badany rozkład prawdopodobieństwa, tzn. zadana jest nie tylko funkcja F_{teor}, ale także wartości liczbowe jej parametrów. Praktyka wygląda inaczej: parametry tej funkcji zwykle są estymowane. Oznacza to, że testowanie takie nie jest całkiem poprawne (Fisz 1969).

W ostatnich latach, korzystając z możliwości, jakie stwarza komputer, bada się empirycznie (metodą Monte Carlo) wpływ estymacji parametrów rozkładu na wartości krytyczne statystyk testowych. Okazuje się, że różnice pomiędzy wartościami teoretycznymi, otrzymanymi w przypadku „parametry znane", a wartościami krytycznymi, otrzymanymi dla przypadku „parametry estymowane", są często znaczące. Przykład takich różnic oparty na pracach autora (Węglarczyk 1993b; 1995b) podany został dla dwuparametrowych rozkładów lognormalnego i gamma w tabeli 8.3. Podobne wielkości obniżenia wartości krytycznych statystyki (8.32) testu Kołmogorowa dla rozkładu Weibulla z estymowanymi parametrami uzyskali Evans i in. (1989).

Tabela 8.3

Obniżenie wartości krytycznych statystyki (8.32) testu Kołmogorowa wskutek estymacji parametrów rozkładu (źródło: Węglarczyk 1993b)

Poziom istotności α testu Kołmogorowa	Wartości krytyczne $\lambda_{kryt}(\alpha)$ testu Kołmogorowa		
	parametry rozkładu znane	parametry rozkładu estymowane (metoda największej wiarygodności)	
	rozkład dowolny	rozkład logarytmiczny	rozkład gamma
0,10	1,22	0,80 ± 0,01	0,81 ± 0,01
0,05	1,36	0,87 ± 0,02	0,88 ± 0,01
0,01	1,63	1,00 ± 0,03	1,10 ± 0,01

Praca Fisza

buantę empiryczną $S_n(x)$ oraz statystykę D_n. Aby zweryfikować tę hipotezę na poziomie α, znajdujemy z tablicy VIII taką wartość λ_0, że $Q(\lambda_0) = 1-\alpha$. Jeżeli zaobserwowana wartość statystyki D_n jest niemniejsza od $\lambda_0/\sqrt{n}$, odrzucamy hipotezę H_0. W przeciwnym razie nie mamy podstaw do jej odrzucenia.

PRZYKŁAD 12.5.1. W tablicy 12.5.1 podano, na podstawie artykułu Wiszniewskiego [1], rozkład miesięcznych temperatur przeciętnych w Warszawie w latach 1779-1947 (bez roku 1945). Ogólna ilość obserwacji wynosi więc $n = 168$.

Niech X oznacza przeciętną temperaturę w styczniu w Warszawie. Przez x_k oznaczono w tablicy 12.5.1 zaobserwowane wartości zmiennej losowej X, a przez n_k — ilość obserwacji x_k. Z tablicy tej obliczono

$$\bar{x} = -4{,}22, \quad s = 3{,}57,$$

gdzie $\bar{x}$ i s są odpowiednio wartością przeciętną i odchyleniem standardowym z próby. Wysuwamy hipotezę H_0, że zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(-4{,}22; 3{,}57)$ i weryfikujemy tę hipotezę na poziomie $\alpha = 0{,}05$, korzystając z twierdzenia Kołmogorowa. W tym celu znajdujemy wartości dystrybuanty zmiennej o rozkładzie $N(-4{,}22; 3{,}57)$ oraz wartości dystrybuanty empirycznej w punktach x_k. Dane te zamieszczono w tablicy 12.5.1. Zaobserwowaną wartość d_n zmiennej losowej D_n znajdujemy jako największą z zaobserwowanych różnic $|s_n(x_{k+1}) - F(x_k)|$ i $|s_n(x_k) - F(x_k)|$. I tak otrzymujemy

$$d_n = |s_n(-5{,}4) - F(-5{,}4)| = 0{,}086.$$

Z tablicy VIII znajdujemy

$$P(D_n > 0{,}086) = P(D_n\sqrt{168} > 1{,}115) \cong 0{,}1663.$$

Test ten nie prowadzi więc do odrzucenia hipotezy H_0.

Zwracamy uwagę czytelnika, że rozumowanie zastosowane w tym przykładzie nie jest całkiem poprawne. Mianowicie Gichman [2] wykazał, że gdy dystrybuanta teoretyczna jest zależna od parametrów nieznanych, które szacujemy z próby, to twierdzenie 10.11.1 (Kołmogorowa) nie jest spełnione. Należy więc z rezerwą traktować wyniki otrzymane przez zastosowanie twierdzenia Kołmogorowa w rozważanej sytuacji.

Nasuwa się także następująca uwaga w związku z przykładem 12.5.1. W praktyce obserwuje się wielkości badane tylko z pewną dokładnością, wynikającą choćby z przyjętego układu jednostek miar. Tak więc w przykładzie 12.5.1 obserwowano temperaturę z dokładnością do 0,1°C, wskutek czego obserwacje leżące w przedziale $(x_k - 0{,}05°C, x_k + 0{,}05°C)$ zostały zgrupowane w punkcie x_k. Co prawda, grupowanie obserwacji wpływa, jak wykazał Gichman [1], [3], na granicę ciągu $Q_n(\lambda)$. Jednakże Gichman stwierdził, że gdy długości przedziałów grupowania zmierzają, przy $n \to \infty$, jednostajnie do zera, można stosować twierdzenie Kołmogorowa. W myśl interpretacji praktycznej tego warunku, można stosować twierdzenie Kołmogorowa, gdy wszystkie przedziały grupowania są małe. Uwaga ta dotyczy także twierdzenia Smirnowa.

Hydrologia stosowana

Spośród różnych testów zgodności najbardziej rozpowszechniony jest test λ-K o ł m o g o r o w a [*Zasady*..., 1969], który w praktyce okazuje się testem zbyt łagodnym, rzadko prowadzącym do odrzucenia założonego rozkładu teoretycznego. Składają się na to dwie istotne przyczyny. Po pierwsze, w obowiązujących przepisach [*Zasady*..., 1969] błędnie został podany wzór na statystykę testu. Powinna ona być obliczana w następujący sposób:

$$\lambda = \sup_x \left(|p(x) - \hat{p}_n(x)|\right)\sqrt{n} = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \max\left(\left|p(x_m) - \frac{m}{n}\right|, \left|p(x_m) - \frac{m-1}{n}\right|\right)\sqrt{n} \tag{3.47}$$

gdzie

$p(x)$ — teoretyczna funkcja prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej X.

$\hat{p}_n(x)$ — empiryczna funkcja prawdopodobieństwa przewyższenia określona dla uporządkowanej nierosnąco n-elementowej próby losowej jako funkcja schodkowa:

$$\hat{p}_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x > x_1 \\ \dfrac{m}{n} & \text{dla } x_m \leqslant x \leqslant x_{m-1} \\ 1 & \text{dla } x \leqslant x_n \end{cases}$$

$p(x_m)$ — teoretyczne prawdopodobieństwo przewyższenia m-tego elementu w uporządkowanej n-elementowej próbie losowej (odczytane z obliczonej funkcji rozkładu teoretycznego).

$\sup_x(.)$ — oznacza kres górny wyrażenia (.),

$\max_{1 \leqslant m \leqslant n} \max(a_m, b_m)$ — oznacza, że dla każdego m-tego elementu próby losowej należy wybrać większą z dwóch wartości a_m lub b_m oraz wartość maksymalną z wybranych w ten sposób n wartości.

Po drugie, jeśli parametry funkcji rozkładu są szacowane z próby losowej (nie są znane z góry, np. na podstawie fizycznych przesłanek), to twierdzenie Kołmogorowa nie jest spełnione [Domański C., 1990; Węglarczyk S., 1993]. Wówczas wynik uzyskany z testu nie może być podstawą do wnioskowania o odrzuceniu, bądź nieodrzuceniu hipotezy o zgodności rozkładu teoretycznego z danymi obserwacyjnymi. W hydrologii estymuje się parametry założonych postaci rozkładów prawdopodobieństwa i w związku z tym test λ-Kołmogorowa nie powinien być stosowany.

Omówionej wyżej „wady" nie ma np. t e s t χ^2-P e a r s o n a ze statystyką

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} \tag{3.48}$$

gdzie

m_i — liczba elementów próby losowej w i-tym przedziale,

π_i — prawdopodobieństwo zaobserwowania wartości zmiennej losowej w i-tym przedziale.

Statystyka ta przy $n \to \infty$ ma rozkład χ^2 z $(r - k - 1)$ stopniami swobody, gdzie

r jest liczbą przedziałów, na które podzielono zakres wartości zmiennej losowej; k natomiast jest liczbą parametrów funkcji rozkładu prawdopodobieństwa, estymowanych z próby losowej metodą największej wiarygodności. W celu obliczenia wartości tej statystyki należy podzielić obszar zmienności zmiennej losowej X na r przedziałów Δx_i. Prawdopodobieństwo π_i, że element próby losowej będzie miał wartość należącą do przedziału Δx_i, określa się za pomocą funkcji rozkładu teoretycznego jako różnicę prawdopodobieństw przewyższenia wartości granicznych i-tego przedziału. W każdym przedziale Δx_i znajduje się m_i elementów próby losowej. Wyrażenie $m_i - n\pi_i$ oznacza więc różnicę między liczebnością empiryczną i teoretyczną w i-tym przedziale. Zgodność jest tym większa, im różnica ta jest mniejsza. Wartość krytyczną statystyki χ^2 określa się z tablic rozkładu χ^2 (tab. 1.7) na podstawie założonego poziomu istotności testu. Porównując wartość statystyki obliczonej ze wzoru (3.48) z wartością krytyczną można uzyskać jeden z następujących wyników testu:

$\chi^2 < \chi^2_{kr}$ — nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym (danymi obserwacyjnymi),

$\chi^2 \geqslant \chi^2_{kr}$ — rozkład teoretyczny nie jest zgodny z rozkładem empirycznym, hipoteza o zgodności zostaje odrzucona.

Przedział ufności. Przy ustalaniu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X istotne znaczenie ma oszacowanie błędów estymatorów, np. parametrów rozkładu, lub częściej kwantyla teoretycznego. Użyteczne stają się wówczas wyprowadzone na drodze teoretycznej tzw. asymptotyczne rozkłady prawdopodobieństwa estymatorów. Praktyczne zastosowanie tych rozkładów wiąże się bezpośrednio z pojęciem przedziału ufności estymatora.

Przedziałem ufności nazywany jest obszar, w którym z zadanym prawdopodobieństwem P_α (poziomem ufności) wystąpi rzeczywista (nieznana) wartość parametru lub kwantyla. Przedział ufności można przedstawić w postaci:

— dla szacowanych parametrów funkcji rozkładu prawdopodobieństwa

$$P_\alpha = P[\hat{g} - |t_\alpha|\hat{\sigma}(g) \leqslant g \leqslant \hat{g} + |t_\alpha|\hat{\sigma}(g)] \tag{3.49}$$

— dla kwantyli odczytywanych z teoretycznej krzywej rozkładu prawdopodobieństwa

$$P_\alpha = P[\hat{x}_p - |t_\alpha|\sigma(\hat{x}_p) \leqslant x_p \leqslant \hat{x}_p + |t_\alpha|\sigma(x_p)] \tag{3.50}$$

Wzory na błędy estymatorów, czyli na odchylenia standardowe $\sigma(\hat{g})$ i $\sigma(\hat{x}_p)$ wynikają bezpośrednio ze znajomości rozkładów asymptotycznych, a pośrednio

T a b e l a 3.3. **Wartości t_α do obliczania górnej (+) i dolnej (−) granicy przedziału ufności w zależności od poziomu ufności P_α [Kaczmarek, 1970]**

P_α [%]	t_α
95.0	±1.960
90.0	±1.645
80.0	±1.282
68.3	±1.000
50.0	±0.675

T a b e l a 3.4. **Wartości t'_α w funkcji prawdopodobieństwa P'_α nieprzekroczenia górnej granicy przedziału ufności [Kaczmarek, 1970]**

P'_α [%]	t'_α
95.0	1,645
90.0	1,282
84.1	1,000
80.0	0,842
50.0	0